=

Prolégomènes à une étude philosophique de l'œuvre de Alexandre Grothendieck. Colloque en hommage à Grothendieck

Jean-Jacques Szczeciniarz

Paris-Diderot

février 2015

Content :

Quelques mots de philosophie des mathématiques. Très fréquemment elle est considérée comme "toxique" par les mathématiciens. Il y a de bonnes raisons à cela. La principale tient sans doute à la nature de la philosophie vient aprè s (non active) et retient des éléments de l'activité scientifique qu'elle s'efforce de faire rentrer dans un cadre probématique et catégorique préétabli. On peut avoir l'impression que son discours ne concerne pas les mathématiques

Cela est dû à l'autre face de la philosophie qui n'est jamais isolée des autres formes de disciplines ou de culture avec lesquelles elle communique donc. Il est de ce fait très difficile à tels discours philosophiques de prendre en compte quoi qu'elles disent les formes réelles de la pratique scientifique. Cela est d'autant plus vrai en mathématique. Ou si l'on veut dans un autre sens : il y aurait la pratique scientifique et la prétendue théorie philosophique.

Je voudrais montrer qu'il n'en est rien. Les mathématiques produisent de la philosophie à différents niveaux, sous différentes formes. Cela ne signifie pas que cette philosophie soit immédiatement prête à être livrée. Je voudrais insister sur plusieurs points : les mathématiques produisent et c'est ainsi qu'elles évoluent une puissante réflexion sur elles-mêmes et c'est à l'occasion de cette réflexion qu'elles peuvent se transformer radicalement. Cette transformation peut se traduire par une véritable révolution théorique (on verra que c'est le cas des travaux de Grothendieck).

La philosophie est encore désarmée pour prendre véritabement en compte ces révolutions. J'en donnerai trois caractéristiques.
a) épistémologiques : un nouveau regard une nouvelle vue de ses objets liée à une nouvelle synthèse des anciens par l'intermédiaire de ces nouveaux concepts ou nouvelles structures, un nouveau parcours assumé des disciplines qui constituent provisoirement l'ensemble du corpus, un remaniement des pôles essentiels des mathématiques et de leur rapport (géométrie, espace topologie, algèbre structures et contrôle, arithmétique)

b) ontologique : de nouveaux objets avec de nouveaux contours ou de nouvelles formes, qui bouleversent l'ontologie ancienne (le cas du point chez Grothendieck, des diagrammes à des niveaux là encore très diversifiés. Dans l'extension des nouveaux objets les anciens sont affectés par cette nouvelle ontologie

c) J'appellerai ce troisième aspect philosophique : il est souvent le plus élaboré bien qu'il ne se donne pas à voir comme philosophiquement "adéquat". Je classe dans cette rubrique toutes les nouvelles formes de contrôle de soi comme conditions d'exercice de la discipline (suite cohomologique specrtales) mais aussi à un niveau plus métaphysique un certain rapport de la finitude et de l'infini, au symbolisme formel et à l'écriture même des mathématiques
A quoi il faut ajouter le projet en quelque sorte transcendantal développé : établir les conditions *a priori* de la production des objets mathématiques.

A quel point l'activité mathématique est au plus près de la reprise de ses propres conditions, ou des conditions de son extension, de sa préservation, stabilité de structure ou de notions. Nombreux sont les notions, concepts, outils qui assument cette fonction, c'est bien évidemment le cas de CT.

Il y a un impératif que la philosophie des mathématiques doit respecter : ne pas se soumettre pour élaborer ses analyses au résultat mathématique qui a ses règles de production et de preuve. Pourtant elle doit restituer rigoureusment les résultats et leurs preuves, mais son analyse ensuite ou en même temps est autre. Elle se doit entre autre de pouvoir présenter les types d'êtres ou les modalités d'existence des nouveaux objets que les mathématiques produisent. C'est sans doute là que ses difficultés ne serait-ce que pratiques sont les plus importantes.

Il y a un autre trait caractéristqiue que l'on trouve chez les mathématiciens au travail ou même une fois le travail accompli, la faculté de reformuler en des termes simplifiés mais non triviaux les aspects essentiels de leur travail, il y a une faculté seconde de retraduire en métaphore et en langage simple l'activité mathématique quelle que soit sa complexité (vulgarisation intrinsèque)

Mon exposé se centrera sur la première partie de l'œuvre de Grothendieck. J'adopterai un plan historique : donc je vais parler de certains aspects d'EGA et du thème de la théorie des schémas en insistant sur la révolution théorique que cette nouvelle conception de la Gométrie Algébrique a accomplie. Comme on le sait Grothendieck a fait de remarquables travaux d'analyse fonctionnelle qui connaissent un grand regain aujourd'hui, mais je me concentre sur la G A et les schémas. Je n'en donnerai que des aspects frappants et je m'efforcerai de présenter en même temps certains commentaires philosophiques. La première partie (exemples, sera assez simplement technique

Grothendieck s'est investi dans la GA durant tout le temps où il était professeur à l'IHES (1959-1970). La GA est l'étude des objets définis par des équations polynomiales et leur interprétation dans un langage géométrique. (Longue tradition depuis les algébristes italiens en passant par Viète et Descartes).

Un des thèmes centraux de l'algèbre et de la géométrie du XXè siècle a été la mise en évidence de la distinction de ce qui est global et de ce qui est local dans une situation mathématique. C'est une des formes par laquelle la réflexion sur soi des mathématiques s'est manifestée. (Remarques sur l'histoire de la physique et sur les relations physique et mathématiques).

Le problème pour les GA a été dès le début de construire un bon cadre pour le passage du local au global. Et c'est sans doute la géométrie analytique complexe qui a montré la voie. Essentiellement par son usage de la théorie des faisceaux. Le problème 'est sans doute issu de la manière dont la réflexion de cette discipline s'est développée.

Les théorèmes A and B de Cartan sont deux resultatss prouvés by Henri Cartan vers 1951, concernant un faisceau cohérent F sur une varité de Stein X. Elles ont une signification pour plusieurs variables complexes , pour le développement général de la cohomologie des faisceaux.
Théorème A. F is engendré par ses sections globales.
Théorème B est établi en termes de cohomologie (une formulation que Cartan (1953, p.51) attribue to J.-P. Serre) :
Théorème B. $H^p(X, F) = 0$ *for all* $p > 0$.
Des propriétés analogues furent établies par Serre (1955) pour les faisceaux cohérents en GA quand X est un schéma affine. Je vais revenir de manière moins abrupte et plus philosophique sur la relation GA GC qui a toujours animé le corpus et été l'objet de réflexion des mathématiciens.

Une réflexion sur une discipline des mathématiques peut se développer et s'approfondir au point qu'elle acquière une valeur en soi et vaut pour d'autres secteurs des mathématiques c'est le cas des théorèmes A et B de Cartan qui deviennent un cadre de réflexion pour ce qui est du problème local/global. C'est ce qui s'est passé pour la géométrie analytique complexe.Une réflexion sur la question du prolongement des domaines de définition des fonctions en plusieurs variables s'est construite en profondeur avec comme aboutissement les profonds théorèmes d'Oka puis la naissance de l'élaboration de la théorie des faisceaux chez Leray Cartan.

Cette théorie a été reprise par Serre et Grothendieck. D'abord Serre. Le travail de transposition est amené par le caractère "réflexif" général qu'a apporté les théories et les concepts de la GAC. Un espace analytique complexe est un espace annelé avec un espace sous-jacent et son faisceau de fonctions holomorphes

Chacun de ces concepts demanderaient de longs développements. Ce qui caractérise ces structures c'est leur grande puissance synthétique : ils rassemblent et unifient des notions venues de domaines différents, ou plutôt représentent une façon de travailler avec la topologie et l'algèbre **en même temps**. La nouvelle ontologie : les objets sont des objets synthétisés qui fournissent une base de travail en tant que nouveaux objets.

Dans un très instructif exposé et très vivant P. Cartier avait montré comment les schémas comme structure sont en quelque sorte le squelette de l'espace en synthétisant structurellement et historiquement la notion de localisation, de microcosme et de globalisation. Je reprends ces éléments bien entendu mais d'une manière détournée.

Pour construire le nouvel objet à chaque fois Grothendieck a la capacité d'étendre au maximum d'objets disponibles le domaine d'application de l'objet (second) en construction. Je considère le *Spectre* d'un anneau : on sait bien que Grothendieck considère tous les idéaux premiers et non pas seulement les idéaux maximaux. Un premier concept de points apparaît alors : les points de Spec A (anneau) ce sont les idéaux premiers de l'anneau considéré. Déjà l'algèbre est investi par la topologie : il s'agit de considérer les points de cet anneau vu donc comme un espace.

Je reviens à mes remarques philosophiques : synthèse adaptée de domaines, extension créatrice, transformations effectuées nécessitées par cette extension. On dira que c'est là le lot avec plus ou moins réussites de tout travail mathématique. Ce qui fait la force de G c'est la puissance de l'extension et la réussite de la synthèse. Il s'agit ensuite de travailler sur ces nouveaux objets de mener de fronts les différents éléments qui les composent.

A l'aide de ces idéaux premiers on définit de nouveaux ensembles comme objets. Et du même coup une topologie sur Spec A. Si a est un idéal de l'anneau A alors soit donc $V(a)$ l'ensemble des idéaux premiers qui contiennent l'idéal a. Ces nouveaux objets présentent de nouvelles contraintes les règles de manipulation de $V(a)$, qui reprennent celles de la définition d'un idéal et présente les ensembles qu'ils forment.

La topologie que l'on forme ainsi comporte les sous-ensembles de la forme $V(a)$ comme fermés. (Par exemple on $V(A) = \emptyset$. Et $V(\emptyset) = SpecA$). Nous connaissons ces définitions qui sont élémentaires pour un débutant en GA. Mais là n'est pas mon point, il s'agit de mettre en évidence précisément la forme de ces nouvelles synthèse et des nouveaux objets d'étude. Il est remarquable que ce soit en définissant des objets de cette manière : focalisés sur l'idéal premier qu'ils contiennent que nous obtenions une bonne définition d'un fermé. (Remarque sur cette forme de synthèse).

Nous allons dans le même but complexifier encore la structure (qui doit en faire une seule). On définit sur $Spec(A)$ un faisceau, d'anneau $\mathcal{O}$ sur Spec A. A chaque idéal premier $(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{A}$ on prend $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ la localisation de A en $\mathfrak{p}$. Pour un ouvert $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{Spec\ A}$ on définit $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ comme l'ensemble des fonctions

$$\mathrm{s} : \mathrm{U} \to \coprod_{\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{U}} \mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$$

telles que $\mathrm{s}(\mathfrak{p}) \in \mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ et tels que s est localement un quotient d'éléments de A.

C'est là un des ingrédients (avec la notion générale) la localisation qui constituent la notion de schéma.

ou encore comme Hartshorne : pour chaque $\mathfrak{p} \in U$ il existe un voisinage V de $\mathfrak{p}$ contenu dans U et des éléments a, f, $\in A$ tels que pour chaque $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ et $s(\mathfrak{q}) = a/f$ dans $A_{\mathfrak{q}}$.

Cette définition elle-même est encore l'effet d'un déplacement fondamental, déplacement et généralisation : au lieu de considérer les fonctions régulières sur une variété, nous considérons les fonctions sur les différents anneaux locaux et non sur un corps. Le passage des corps aux anneaux locaux. En un certain sens pour construire et déplacer généraliser on a déconstruit la fonction exercée par le corps sur lequel on avait disposé d'une variété.

$\mathcal{O}$(U) est un anneau commutatif avec identité et que si V$\subseteq$ U sont deux ensembles ouverts l'application restriction $\mathcal{O}$(U) $\rightarrow$ $\mathcal{O}$(V)est un homomorphisme d'anneaux et donc $\mathcal{O}$ est un préfaisceau. On montre qu'il est aussi un faisceau. Je reviens plus loin sur cette question

On définit ensuite le *Spectrum*. Si A est un anneau, le *Spectrum* de A est la paire consistant en l'espace topologique Spec A et le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ défini sur lui.

C'est une synthèse nouvelle. On avait pour un anneau donné son spectre Spec A, $\mathcal{O}$ Et dans ce cadre nous pouvons retrouver des significations accordées aux concepts algébriques comme par exemple l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ et la fibre $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Quelle est la signification philosophique de cette construction ?

La généralisation suivante est typique : à chaque anneau A nous savons associer un *Spectrum*, (Spec A, $\mathcal{O}$). C'est ici que s'introduit une première nécessité issue de la CT. On voudrait que cette correspondance soit fonctorielle. Une des formes d'extension dans son essence de la théorie de la GA est son extension fonctorielle. Qu'est-ce à dire ?

Dans de nombreuses situations du développement des mathématiques il apparaît que se présente "spontanément" une situation qui se constitue comme correspondance entre des concepts des structures de nature différente qui pourant doivent se constituer comme liées par une forme concepruelle adéquate qui en préserve les structures dans cette correspondance même.

Le passage de la correspondance entre anneau et *Spectrum* pour devenir fonctoriel exige une catégorie adaptée, la bonne catégorie est celle d'espace localement annelé.

Citation de *Récoltes et semailles*

Peut-être peut-on dire que la grande "idée est le premier point de vue qui, non seulement se révèle nouveau et fécond, mais qui introduit dans la science un thème nouveau et vaste et qui l'incarne. Et toute science, quand nous l'entendons non comme un instrument de pouvoir et de domination, mais comme aventure de connaissance de notre espèce à travers les ages n'est autre chose que cette harmonie, plus ou moins vaste et plus ou moins riche d'une époque à l'autre, qui se déploie au cous des générations et des siècles par le délicat contrepoint de tous les thèmes apparus tour à tour, comme appelés du néant, pour se joindre en elle et s'y entrelacer

Grothendieck ajoute que quand il quitte la scène mathématique en 1970 l'ensemble de ses publications sur le thème central des schémas devait se monter à quelques dix milles pages

> *la partie de mon programme sur le thème schématique et sur ses prolongements et ramifications que j'avais accomplie au moment de mon départ représente à lui seul le plus vaste travail de fondements jamais accompli dans l'histoire de la mathématique et sûrement un des plus vastes dans l'histoire des Sciences*

Parmi les douze thèmes qu'il retient les schémas sont classés en 4 histotriquement avant il y a dualité continue" et "discrète"(les catégories dérivées six opérations) puis les topos, cohomologie étale et l-adique, motifs, et groupe de Galois motivique, cristaux et cohomologie cristalline etc.

En fait on peut toujours prendre les choses dans leur tradition historique et montrer que la théorie nouvelle n'en est qu'un approfondissement rehaussement .La théorie des équations polynomiales, je vais utiliser des exemples donnés par David Madore géomètre algébriste voir son blog ou dans d'autres manuels.
Le type d'objets que la GA étudie ce sont les solutions des équations polynomiales (en plusieurs variables) considérées comme des objets géométriques. Je ne peux développer suffisamment ce point : il y a une histoire des rapports géométrie algèbre qui traverse notre pensée, le fait que le contrôle algébrique nous donne accès à un espace ou à l'espace, la géométrie algébrique est un approfondissement de cette relation qui compte Descartes parmi ses promoteurs.

La géométrie algébrique classique puis moderne est une véritable meditation réflexive sur ces modes d'accès.
Si j'écris $x^2 + y^2 = 1$ l'équation du cercle unité (affine), un "objet" C est désigné et conçu à travers, au moyen de cette équation. mais j'ai là une structure algébrique très élaborée. Pour n'importe quelle k - algèbre A je vais considérer l'ensemble C(K) ou C(A) des couples (x, y) de deux éléments de K ou A tels que $x^2 + y^2 = 1$.

historiquement ce sont aux solutions sur un corps K qui ont intéressé les GA. Mais le passage à une k-algèbre est un saut conceptuel qui produit comme toujours en mathématique un effet de synthèse expansive qui guide la manière dont je vais réaliser la solution et la saisir dans l'espace de ma représentation.

C($\mathbb{Z}$) n'a que 4 points, $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$, C$\mathbb{R}$ correspond naivement à ce qu'on appelle un cercle qu'on peut paramt́erer de façon transcendante par cosθ, sinθ. On peut montrer que C(F) si F est un corps fini à q éléments q une puissance d'un nombre premier a q-1, q, q+1 éléments selon que q est respectivement congru à 1 modulo 4, 3 modulo 4, ou bien une puissance de 2

Si K est un corps de caractéristique différente de 2, C(K) peut être paramétré par $t \mapsto (1-t^2)/(1+t^2), 2t/(1+t^2)$ sauf le point (-1, 0)

sa formulation L'objet basique de de GA est celui qui est défini par des équations polynomiales $f_1 = \cdots = f_r = 0$ en plusieurs variables $(t_1, \cdots, t_n)$ dans l'espace affine.
Si on se donne r polynômes $t_1, \cdots, t_n)$ à coefficients dans k et en n variables $t_1, \cdots, t_n)$ on appelle *schéma algébrique affine sur k défini par $t_1, \cdots, t_n$ dans l'espace affine de dimension n* l'objet X qui à toute k-algèbre A associe l'ensemble X(A) des solutions communes des équations $f_i(t_1, \cdots, t_n) = 0$ dans A^n L'ensemble X(A) des n-uplets $t_1, \cdots, t_n)$ d'éléments de A tels que tous les polynôme s s'annulent $f_1(t_i, \cdots, t_n) = 0$ pour tout i. On dit que X(A) est l'ensemble des A-points de X.

Le schéma algébrique affine défini par zéro équations qu'on appelle espace affine de dimension n lui-même $\mathbf{A^n}$ dont les A-points pour toute k-algèbre A, sont l'ensemble $\mathbf{A^n}(A) = A^n$ des n-uplets d'éléments de A. En particulier la droite affine est l'objet $\mathbf{A^1}$ dont les A-points pour n'importe quelle k-algèbre A sont simplement les éléments de A.

Plus basiquement, le *point* qu'on peut considérer comme l'espace affine de dimension 0, ou bien comme l'origine de l'espace affine de n'importe quelle dimension a exactement un A-point pour n'importe quelle k-algèbre A. On le note $\{*\}$. On le notera aussi Spec (k). Le schéma algébrique défini par l'équation $1 = 0$ l'ensemble vide $\emptyset$ qu'on note aussi Spec(0)

Encore un exemple. Considérons l'objet Θ défini dans la droite affine en une seule variable t par l'équation $t^2 = 0$. Si K est un corps alors Θ (K) a un unique élément, 0. Néanmoins on ne considère pas que Θ soit identique à l'objet trivial d'équation t=0. (qui n'a qu'un seul point sur n'importe quelle k-algèbre A) une k-algèbre peut trs bien avoir des éléments non nuls vérifiant $t^2 = 0$ (ce sont des éléments) dits *nilpotents* d'ordre 2. On dit que Θ est un point *épaissi, d'ordre 2*. Remarque sur l'ontologie.

Une mise en place de l'ontologie

On se donne r polynômes $t_1, \cdots, t_n$ en n variables $(t_1, \cdots, t_n)$ et on définit comme X le schéma affine correspondant, dont l'ensemble X(A) des A-points pour n'importe quelle k-algèbre A est l'ensemble des solutions des équations polynomiales $f_i = 0$ dans A^n

On associe à cette situation une k-algèbre qui est le quotient $R := k[t_1, \cdots, t_n]/(f_1, \cdots, f_r)$ de l'anneau $k[t_1, \cdots, t_n]$ des polynômes en n variables par l'idéal qu'y engendrent les r polynômes $f_1, \cdots, f_i, \cdots, f_r$

On considère R comme l'algèbre des fonctions régulières sur (polynomiales) sur X. Un polynôme en n variables est un polynôme sur l'espace affine $\mathbf{A^n}$ et le fait de le quotienter par les f_j fait qu'on se restreint à l'endroit où il s'annule en ignorant toute combinaison de ces polynômes. Plus précisément, si A est une k-algèbre quelconque et h un élément de R représenté par un polynôme en n variables soit $\tilde{h}$. Un élément $x_1, \cdots, x_n \in X(A)$ est par définition un n -uplet d'éléments de A qui annule tous les f_j et si on définit h(x) comme la valeur de h en $x_1, \cdots, x_n$ alors celle-ci ne dépend pas du choix de $\tilde{h}$ représentant h.

Se donner un élément x de X(A) revient à se donner un morphisme $R \to A$ de k-algèbres (celle qui par le morphisme d'évaluation -en-x à un élément h de R associe sa valeur h(x) définie ci-dessus). C'est dans l'esprit, disons la dynamique conceptuelle de la transformation conceptuelle de la GA classique de transformer les objets conceptuels en des morphismes et nous faire comprendre qu'en "réalité" les objets sont des morphismes.

Se donner un morphisme $k[t_1, \cdots, t_n] \rightarrow A$ revient exactement à se donner les images $x_1, \cdots, x_n$ dans A par ce morphisme (elles peuvent être quelconques et déterminent ce morphisme complètement) et ce morphisme passe au quotient (s'annulent sur l'idéal engendré par par les f_j si et seulement si $x_1, \cdots, x_n$ vérifie les équations $f_j = 0$, i.e. appartient à X(A). On peut donc identifier X(A) à l'ensemble des morphismes de k-algèbres $R \rightarrow A$. Je réinsiste sur la transformation ontologique du concept d'équations polynomiales et du concept de leurs solutions

La k-algèbre détermine complètement X elle détermine X(A) à bijection naturelle près. Cette bijection est "naturelle" en A. X est le **spectre** de la k-algèbre R noté Spec (R). Cela signifie avant que nous soyons parvenus jusqu'à la dernière ontologie, que si on écrit R comme $k[t_1, \cdots, t_n]/(f_1, \cdots, f_r)$ X est l'objet géométrique défini par les équations $(f_1, \cdots, f_r)$, c'est un schéma algébrique affine. Les k-algèbres écrites comme ci-dessus pour certains polynômes en n variables sont appelées k-algèbres de **présentation finie**.

De ce point de vue les mathématiques, i.e. la GA ici est un jeu de transformations ontologiques essentiellement de transformations de notre *manière de les considérer et de les traiter*. Il existe une manière tout à fait spécifique de généraliser, ici d'étendre le domaine d'application du concept en cours d'élaboration. cette façon de faire est propre à AG et aux mathématiciens qui travaillent avec lui.

On pourrait considérer que Grothendieck produit une réflexion sur les conditions de recherche "en structures" de solutions d'équations polynomiales en retraduisant toutes les conditions mathématiques et donc structurales de la position de ces équations. Et là encore rechercher la structure au fondement et donner les conditions reformulée de ce qu'est une solution d'équation produit d'autres objets géométriques. c'est ce qu'on a vu dans les exemples précédents. Continuons

des morphismes aux foncteurs, la notion de pré faisceaux

Il est très remarquable que l'on puisse repérer dans toute l'histoire des mathématiques, plus particulièrement lorsque on observe une circulation des concepts dans une discipline ou le passage d'une discipline à une autre un effet que l'on peut appeler fonctoriel. Lorsque les notions se construisent et s'autonomisent il est remarquable qu'elles peuvent tout en restant dans leur champ être mises en relation.

Si $\phi : A \to B$ est un morphisme k-algèbre et qu'on applique à chaque coordonnée d'un élément $x \in X(A)$ il est clair que le $\phi(x)$ ainsi obtenu va vérifier les mêmes équations, donc appartient à X(B). Autrement dit X associe non seulement à n'importe quelle k-algèbre A un ensembble X(A) mais il associe à n'importe quel morphisme $A \to B$ un morphisme de k-algèbre une application $X(A) \to X(B)$ et la composée $X(A) \to X(B) \to X(C)$ déduite des deux morphismes $A \to B \to C$ est l'application $X(A) \to X(C)$ associée au morphisme composé $A \to C$, c'est la **fonctorialité**

Que fait cet opérateur ? Bien entendu appliquer une catégorie dans une autre mais il agit sur n'importe quel morphisme de catégories. X(A) peut être vu comme l'ensemble des morphismes R$\rightarrow$A. R étant une k-algèbre de présentation finie dont X est le spectre. L'application X(A)$\rightarrow$X(B) déduite de ϕ :A $\rightarrow$B est la composition par ϕ, envoyant un morphisme R$\rightarrow$A sur le morphisme R$\rightarrow$B.

Nous allons maintenant nous attarder sur le concept de foncteur. Il s'agit d'un concept de préservations de "structures" d'abord de la catégorie des k-algeèbre vers les ensembles à toute k-algèbre associe un ensemble A et à tout morphisme ϕ :A$\to$B, une application X(ϕ) : X(A)$\to$X(B). De sorte que X(id$_{\text{A}}$)=id$_{\text{X(A)}}$et pour deux morphismes ϕ :A$\to$B, ψ :B$\to$C, X($\psi \circ \phi$)= X(ψ)$\circ$X(ϕ)

Nous avons bien évidemment un processus d'extension ou d'exportation de formes (c'est le cas le plus fréquent en mathématique) et de application d'opération qui sollicite l'opération définissant le domaine cible et cette fois opère entre les images. C'est un mouvement dialectique semblable à celui que décrit Lawvere approfondissant en un sens Hegel.

Si R est une k-algèbre, on définit un foncteur noté Hom_k(R,-) ou Spec (R) qui à une k-algèbre A associe l'ensemble Hom_k(R,A) des morphismes R$\rightarrow$ A de k-algèbres, et à un morphisme ϕ :A$\rightarrow$B la composition par ϕ. On dit qu'il s'agit du foncteur représenté par par R ou du *spectre* de R un foncteur de cette forme (ou isomorphe à un tel morphisme) est comme on sait appelé *foncteur représentable* par une k-algèbre ou *schéma affine* (sur k). Foncteur est le terme issu de la CT et schéma de GA. Mais on voit un schéma comme un foncteur.

Je voudrais reprendre maintenant quelques formules de Deligne et d'Illusie et sans doute de Cartier. L'invention des schémas par Grothendieck a été l'idée la plus vite acceptée Deligne cite Serre " Je voudrais exposer ici quelques-uns des développements récents de la géométrie algébrique. Je dois préciser que je prends ce dernier terme au sens qui est devenu le sein depuis quelques années : celui de la théorie des schémas." Stockholm 1962

Grothendieck a introduit les schémas (cf. ci-dessus) comme espaces annelés obtenus par recollement pour la topologie de Zariski de spectre d'anneaux commutatifs généraux. Mais il adopte ce que j'ai introduit ci-dessus un point de vue fonctoriel. Grothendieck a développé pour concevoir ses nouvelles structures le langage des catégories existant déjà (Homological Algebra, Cartan Eilenberg).

Considérons une définition encore plus générale que celle donnée ci-dessus. A partir d'une catégorie $\mathcal{C}$ on peut assigner à tout objet X de $\mathcal{C}$ un foncteur contravariant sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles, $h_X : \mathcal{C} \to Ens$ qui sur l'objet T prend la valeur $Hom_{\mathcal{C}}(T, X)$. D'après le lemme de Yoneda le foncteur $X \mapsto h_X$ est pleinement fidèle. Ces deux concepts sont liés.

Si $S := k[t_1, \cdots, t_n]/(f_1, \cdots, f_r)$ est une k-algbre de présentation finie et $R := k[u_1, \cdots, u_m]/(g_1, \cdots, g_r)$ en est une autre les morphismes Spec(S) $\to$Spec (R) entre les schémas affines définis par les f_i dans $\mathbb{A}^n$ et celui défini par les équations g_i dans $\mathbb{A}^m$ sont donnés par les n-plets $(h_1, \cdots, h_m)$ qui vérifient $g_j(h_1, \cdots, h_m)$ pour tout j.

Pour rester dans un cadre géométrique, Grothendieck appelle h_X l'ensemble des *points* de X à valeurs dans T. Ainsi un objet X est connu dès que l'on connaît ses points à valeur dans tout objet T. Grothendieck applique ce concept à la Géométrie Algébrique. C'est là une grande nouveauté car avant lui on ne considérait que les points (dans ce langage) à valeurs dans un corps.

L'audace de Grothendieck une fois cette définition construite est d'accepter que tout anneau commutatif unitaire A définisse un schéma affine Spec (.A) Je reprends le système d'équation polynomiale $f_1(x_i, \cdots, x_n) = \cdots = f_N(x_i, \cdots, x_n) = 0$ les f_i étant des polynômes à coefficients entiers. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie opposée à celle des anneaux et soit F donc le foncteur contravariant associant à chaque anneau A l'ensemble F(A) des solutions (x_i) $x_i \in A$ du système d'équations ci-dessus

Ce foncteur est le foncteur h_X pour X l'objet l'objet de $\mathcal{A}$ correspondant l'anneau quotient de $\mathbb{Z}[x_i, \cdots, x_n]$ par l'idéal engendré par les f_i : le foncteur F est *représenté* par les X, un *schéma affine*. Les points de X à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont les points d'une variété analytique complexe -on peut l'étudier par des méthodes analytiques- les points à valeurs dans $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou dans un corps fini sont les solutions d'un problème diophantien : le foncteur relie arithmétique et géométrie

On voit comment la conception en termes, le concept de schéma, nous fait prendre position sur les rapports entre le domaine géométrique dont on extrait une structure, et l'arithmétique

L'audace de la définition de Grothendieck est d'accepter que tout anneau commutatif unitaire définisse un schéma affine Spec (A) sans restriction à de bons anneaux (intègres, réduits, nœthériens etc.). Comme on sait c'est sans doute une caractéristique de la manière de faire, une position philosophique : dans une situation donnée tenter d'adopter le point de vue le plus général : il faudrait essayer d'aller plus loin dans ce type d'analyse. Si je considère le concept le plus général d'anneaux, je conserve seulement les opérations d'anneau. Le genre sans les espèces. Mais il y a d'autres situations de généralités.

Mais cette généralisation dit Deligne a un prix. Les points de Spec(A) (idéaux premiers de A) n'ont pas un sens géométrique maniable. Le faisceau structural $\mathcal{O}$ n'est pas un faisceau de fonctions. On verra comment on peut transformer la nature des concepts de façon à poursuivre la théorie et retrouver la géométrie.

Si les coefficients des f_i sont dans un anneau B plutôt que dans $\mathbb{Z}$, le foncteur F analogue, sur la catégorie $\mathcal{A}$ opposée à celle des B-algèbres associant à chaque B-algèbre A l'ensemble F(A) des solutions du système d'équations à valeurs dans A est de même représenté par le spectre X d'une B-algèbre (quotient de $B[x_i, \cdots, x_n]$) par l'idéal engendré par les f_i, un schéma *au-dessus* de B

C'est par là que s'introduit le point de vue relatif, un souci constant de Grothendieck, que le langage des schémas permet d'étudier de manière approfondie. Ceci se manifeste par la présence constante du diagramme.

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ S \end{array}$$

L'outil essentiel pour adopter le point de vue *relatif* est le changement de base, généralisation de l'extension des scalaires. L'extension des scalaires est une opération de la théorie des modules qui permet de changer l'anneau de base au moyen d'un morphisme d'anneaux et d'un produit tensoriel, l'opération adjointe étant la restriction des scalaires. Intuitivement le sens de cette opération est d'autoriser davantage de multiplication des scalaires p.e. en remplaçant les nombres réels par des nombres complexes dans un problème.

Soient A et B deux anneaux commutatifs (unitaires) non nuls f : A$\rightarrow$B un homomorphisme d'anneaux et soit M un A-module . Alors B est naturellement muni d'une structure de A-module. $M\otimes_A B$ est également muni d'une structure de A-module. En outre $M\otimes_A B$ peut également être muni d'une structure de B-module par l'application

$B \times (M\otimes_A B) \rightarrow M\otimes_A B$

(b, x$\otimes$ b') $\rightarrow$ (x$\otimes$ bb').

On dit que $M\otimes_A B$ est une extension des scalaires en devenant un module sur B. cette construction est minimale au sens où elle préserve les propriétés du module d'origine.

Cette construction est généralisée par Grothendieck au cas des scémas par le *changement de base*.
Étant donné un schéma X au-dessus de S et un morphisme de changement de base S'$\to$ S on en obtient un autre X' au-dessus de S' produit fibré de X et de S' au-dessus de S soit X' $:=$ S'$\times_S$X et sa projection f' sur S'.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Il y a une longue démonstration dans le Hartshorne (G.A) de l'existence du produit fibré à isomorphisme près dans la catégorie des schémas en 7 étapes

Je voudrais faire une remarque qui est peut-être de portée plus générale. Lorsque Grothendieck prend le risque comme souvent en mathématique d'étendre l'extension d'un concept (le cas des anneaux) et donc de produire de nouveaux "objets" au statut surprenant (ils epuvent être étonnants à plus d'un titre) il se produit peut-être en raison de la situation théorique du corpus une compensation : soit on réussit à contourner cette difficulté en forgeant un nouveau concept soit la généralisation permet de se mouvoir dans un vaste territoire et d'emprunter de nouveaux chemins.

C'est le cas ici. Nous sommes dans une catégorie qui possède les bonnes propriétés. C'est une question d'épistémologie des mathématiques : la stratégie de l'équilibre entre extension et difficultés nouvelles

Une propriété de X sur S sera dite *géométrique* si elle a toujours de bonnes propriétés d'invariance par changement de base. Pour une variété X définie sur un corps k, l'ensemble des points de X sur une extension algébrique close Ω de k (par exemple domaine universel de Weil) est considéré comme "géométrique" l'ensemble des k-points étant "arithmétique".

C'est une question d'abord épistémologique que celle de savoir si le mot ce géométrique a une signification assignable et en rapport avec ce que nous entendons par géométrie. Invariance par changement de base se pense en analogie avec l'invariance par changement de coordonnées en algèbre linéaire de la géométrie différentielle. Il est vrai qu'il s'agit là de propriétés que la GA considère comme géométriques.

Je remarque de plus, c'est une constante dans le travail de construction mathématique il y a une présence des autres domaines, d'autres concepts d'autres disciplines présence différenciée, à des niveaux d'idéalités différents. exemples : faisceaux, algèbres dans les faisceaux etc. C'est cette présence différenciée, à des niveaux différents qui explique les effets d'une construction nouvelle, c'est assez proche de la philosophie hegelienne. C'est ici le cas du terme de géométrie. Mais aussi du concept de ponts dont j'ai parlé.

Cartier. Un schéma est le mécanisme interne, qui engendre les points de l'espace

Si X est un schéma sur S et que u : S $\rightarrow$ S est un morphisme de schémas un S'-point p de X est un morphisme de S-schémas :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ S' \arrow[ur, "p"] \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

On note X(S') l'ensemble des S'-points de X. Il s'identifie à l'ensemble des sections de X'$\rightarrow$S'.

Je reprends l'exemple. Soit X le schéma affine sur un corps k défini par des équations $P_\alpha(X_1, \cdots, X_n)=0$

$Spec(P_\alpha[X_1, \cdots, X_n]/(P_\alpha))$

Soit k' une k-algèbre. L'ensemble X(k') := X(Spec (k')) est l'ensemble des solutions dans k' des équations $P_\alpha = 0$. Pour k' une extension algébriquement close Ω de k c'est l'ensemble $X(\Omega)$ que Weil regarde comme sous-jacent à X

L'intuition géométrique que l'on a de X, schéma sur S est bien reflétée dans X(S'). Mieux que dans l'ensemble sous-jacent à X. Ce déplacement, changement de base permet donc de disposer d'un instrument donnat accès à la géométrie. C'est un aspect important de la manière dont Grothendieck organise les concepts : il y a d'un côté de nouveaux objets qui sont disponibles dans le développement des mathématiques (platonisme) et de l'autre les outils que nous devons forger pour y avoir accès.

Une fois établie la position d'objets nouveaux il s'agit en quelque sorte d'éprouver leur position au sein de la discipline et du corpus. Tel est le cas d'un autre concept clé de l'œuvre de Grothendieck : la platitude

Platitude

Je rappelle ce qu'est un module plat. cf. Hartshorne p.e. EGA, Bourbaki . Soit A un anneau et soit M un A-module. M est plat sur A si le foncteur N$\rightarrow$ M$\otimes_A$N est un foncteur exact pour tout N $\in \mathfrak{Mod}$(A). Si A$\rightarrow$B est un homomorphisme d'anneaux on dit que B est *plat* sur A s'il est plat comme module.

Il y a de nombreuses propriétés de la platitude que l'on trouve démontrées dans Bourbaki. Les propriétés d'extension de la base, de transitivité et de localisation. Ce sont là (il en est d'autres) des propriétés qui rendent opératoire ce concept. Ainsi la platitude se conserve par localisation :
M est plat sur A si et seulement si $M_{\mathfrak{p}}$ est plat sur $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in$ Spec A. Ou

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte. Si M' et M'' sont plats alors M l'est et si M et M'' sont plats alors M' l'est. Chacune de ces propriétés mérite une analyse plus approfondie : la platitude possède cette propriété de conservation particulièrement importante, une des formes de stabilité à la recherche de quoi se met toujours le travail mathématique.

Soit f : X$\rightarrow$ Y un morphisme de schémas et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ module. On dit que $\mathcal{F}$ est plat sur Y en un point x $\in$X, si la fibre $\mathcal{F}_X$ est un $\mathcal{O}_{y,Y}$ module où y= f(x), et on considère $\mathcal{F}_X$ comme un $\mathcal{O}_{y,Y}$ module à travers l'application naturelle $f^\sharp : \mathcal{O}_{y,Y} \rightarrow \mathcal{O}_{x,X}$

Il y a plusieurs questions que nous pouvons poser : pourquoi cette force de pénétration de cette notion structure ? Une réponse est apportée par les mathématiques qu'elle peut contenir sous toutes leurs formes : elle concentre et fait jouer nombres de notions dont je n'ai pu donner qu'un échantillon. L'autre question plus directement philosophique est : comment caractériser philosophiquement je veux dire en termes de concepts philosophiques cette puissance notionnelle ou conceptuelle ?

Pour souligner ce caractère paticulièrement adapté des morphismes plats il suffit de considérer (Hartshorne) que la cohomologie commute à l'extension de base plate. Je cite la théorème suivant :
Soit f : X→Y un morphisme de type fini de schémas nœthériens et $\mathcal{F}$ un faisceau quasi cohérent sur X. Soit u : Y'→Y un morphisme plat de schémas nœthériens

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

Alors pour tout $i \geq 0$ on a l'isomorphisme naturel suivant $u^*R^if_*(\mathcal{F}) \cong R^ig_*(v^*(\mathcal{F}))$

$R^i f_* : \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}(Y)$ est le foncteur image directe supérieure
Sachant que $R^i f_*$ peut être calculé sur $(\mathfrak{Mod}(X)$ comme le foncteur dérivé droit de $f_* : \mathfrak{Mod}(X) \to \mathfrak{Mod}(Y)$

Soit X un schéma nœthérien et soit f : X→Y un morphisme de X sur le schéma affine Y= Spec A. Alors pour tout faisceau quasi cohérent $\mathcal{F}$ sur X on a

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \cong H^i(X, (\mathcal{F}))\tilde{}$$

On utilise ce résultat pour démontrer l'isomorphisme naturel ci-dessus
$u^* R^i f_* (\mathcal{F}) \cong R^i g_*(v^* (\mathcal{F}))$

Avant de quitter la platitude pour un autre thème de Grothendieck, je voudrais reprendre une réflexion de Hartshorne. Nous avons besoin d'une bonne notion de famille algébrique de variétés ou de schémas. Pourquoi ? c'est un processus général que pour de tels objets (variétés schémas ou plus simple espaces vectoriels) nous utilisons ensuite une famille de tels objets.

Pour obtenir une bonne notion de famille nous devons demander que certains invariants numériques restent constants, comme la dimension des fibres. Si nous avons affaire à des variétés non singulières sur un corps la définition naive suffit.
Mais si nous traitons de variétés non normales, ou de schémas plus généraux, la définition naive ne suffit pas. Si nous considérons une famille plate de schémas , cela signifie les fibres d'un morphisme plat et c'est là une "très bonne" notion. Pourquoi la condition algébrique de platitude sur le faisceau structural donne une bonne définition d'une famille est un mystère selon Hartshorne. Mais ce choix se justifie ne montrant que les familles plates ont de très bonnes propriétés.

Plutôt que de développer la notion de platitude dont je n'ai donné que des aperçus je voudrais revenir plus en extension sur les schémas pour en faire voir d'autres puissances de généralisations. Je prends un travail de Daniel Perrin. A l'opposé de la notion de courbe lisse dit-il, l'objet le plus général à qui l'on puisse donner le nom de courbe est simplement un sous-schéma fermé de dimensnion 1 de $\mathbf{P}^3$.

Pour obtenir un tel objet on se donne un idéal homogène I de l'anneau R := $\mathbb{C}$ [X, Y, Z, T] tel que le lieu C des zéros communs des polynômes de I soit de dimension 1. On a affaire à un schéma et non à une variété. La faisceau $\mathcal{O}_C$ des fonctions sur C (indiquant qu'on a un schéma) est défini par la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathrm{C}} \to \mathcal{O}_{\mathrm{P}} \to \mathcal{O}_{\mathrm{C}} \to 0$$

où $\mathcal{I}_{\mathrm{C}}$ est le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{\mathrm{C}} = \tilde{\mathcal{I}}$ associé à I qui est contenu *a priori* dans toutes les fonctions ensemblistement nulles sur sur C mais ne lui est pas égal. De même l'idéal $\mathrm{I}_{\mathrm{C}} = \mathrm{H}^0_*\mathcal{I}_{\mathrm{C}}$ n'est pas l'idéal des polynômes nuls sur C.

Se donner un schéma n'est pas se donner des points mais aussi surtout des **équations**. Un tel sous-schéma fermé de dimension 1 peut être singulier, voire réductible, non connexe, voire non réduit. etc. Le schéma possède cette faculté que les équations nous donnent accès à un grand nombre de situations qui étendent la géométrie restreinte auparavant aux variétés.

Je comprends seulement certains éléments du schéma de Hilbert (cf. exposé à Bourbaki) et je vais seulement rapporter ce qui peut contribuer à mon projet. Une des manières d'étudier la variation des courbes dans les familes est le schéma de Hilbert. Pour définir une famille de courbes de $\mathbf{P}^3$ paramétrée par un schéma S on regarde le projectif au-dessus de S : c 'est le produit fibré $\mathbf{P}^3_S =$ $\mathbf{P}^3(\mathbb{C}) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C})} S$. Il se projette sur S

On peut définir grossièrement une famille de courbes au-dessus de S comme un sous-schéma fermé de $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}^3_{\mathrm{S}}$ muni de la restriction de la projection $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{S}$) telle que les fibres $\mathcal{C}(\mathrm{s})$ de p soient des courbes de $\mathbf{P}^3$ (des sous-schémas fermés de dimension 1). On veut en gros (cf. Perrin) que les courbes varient continûment en fonction du paramètre s.

La bonne notion qui s'est dégagée c'est que le morphisme $p : \mathcal{C} \to \mathrm{S}$ soit plat. On définit le foncteur de Hilbert $\mathrm{Hilb}_{\mathrm{P}}$ par la formule $\{\mathrm{Hilb}_{\mathrm{P}}(\mathrm{S}) = \text{familles plates de courbes de } \mathbf{P}^3 \text{ au-dessus de S}\}$
Grothendieck a prouvé que ce foncteur est représentable par un schéma projectif noté encore $\mathrm{Hilb}_{\mathrm{P}}$ qui représentant le foncteur est donné avec une famille universelle $\mathcal{C}$ de courbes plate sur Hilb

Un excès de géométrie sur la géométrie initiale et donc construire une géométrie supplémentaire

On a un résultat qui explique que les invariants se comportent bien dans les familles plates qui est expliqué par le polynôme de Hilbert. Le schéma de Hilbert est un objet d'étude avec ses spécialistes. Il existe de nombreux théorèmes et des outils particuliers pour leur étude. c'est un domaine immense D.Perrin rappelait que on reprenait le prgramme de Halphen définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre plus générale. Il y aurait pour mille ans de travail !

Les éléments nilpotents dans les anneaux locaux des schémas apparaissent naturellement (par exemple dans les produits fibrés) et ils jouent un rôle clé dans les questions de déformations infinitésimales. Leur usage systématique permet à Grothendieck de construire un calcul différentiel sur les schémas, très général, englobant arithmétique et géométrie.

Il faudrait présenter le faisceau des formes différentielles relatives d'un schéma sur un autre. Nous avons toujours cette formidable extension : dans le as des varaiétésnon singulière sur **C** qui ressemble à une variété complexe le faisceau des formes différentielles est essentiellement le même que le dual du fibré tangent défini en géométrie différentielle. Dans la GA abstraite on définit le faisceau des f d par une méthode purement algébrique (encore une longue tradition)et on définit le fibré tangent comme son dual.

On a besoin du module des f. d. d'un anneau sur un autre. Comme application du faisceau des f. d. H donne une caractérisation des variétés non singulières parmi les schémas de TF sur un corps. Et il définit ensuite le faisceau des f. d. sur une variété non singulière, le faisceau tangent, son faisceau canonique et son genre

Grothendieck s'est posé la question de posséder un critère permettant de dire si un foncteur est représentable. C'est plus tard grâ ce au théorème d'approximation d'Artin que on pourra cracatériser les foncteurs représentables par des espaces algébriques par une conjonction de propriétés de foncteurs qui se vérifient une à une facilement. cf Illusie Raynaud.

C'est le mouvement théorique type : on parvient à reconstruire dans un cadre plus large une partie des mathématiques existantes. Mouvement qui est au moins double. Révolution théorique type. Philosophie de l'extension des mathématiques qui est conçu comme une méthode chez Grothendieck

les schémas formels

Ce qui distingue laz théirie des schémas de la théorie des variatétés est la possibilité d'avoir des éléments nilpotents dans la structure de faisceau d'un schéma.Si Y est un sous-variété ferme d'une variété X définie par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ alors pour tout n$\geq$1 nous pouvons considérer le sous-schéma fermé Y_n défini la nième puissance $\mathcal{I}^n$ du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$. Pour $\geq$ 2 nous avons un schéma avec des éléments nilpotents.Il comporte des informations sur Y et en même temps des propriétés infinitésimales du plongement de Y dans X

On définit une complétion formelle de Y dans X comme objet qui apporte des de l'information sur tous les voisinages infinitésimaux de $Y_{\mathfrak{n}}$ de Y la fois. Il est plus gros que tout Y_n amis est contenu à l'intérieur d'un vosinage ouvert de Y dans X. On l'appelle (Hartshorne) le voisinage forme de Y dans X

Un schéma formelest quelque chose d'intermédiaire entre une sous-variété et une variété ambiente est un êtee nouveau qui a des applications importantes chez Grothendieck

Je me suis concentré sur les schémas présentès classiquement en restant au seuil du grand thème des topos. Plus directement à la fois catégorique et réflexion sur l'espace comme tel. Au-dessus du territoire des schémas.

Je ne consacre qu'un petit paragraphe à la question centrale des catégories. Grotendieck les a développées en profondeur. cf. Tohotû

Je voudrais reprendre de manière plus "technique" certaines notions qu'il faudrait faire remonter philosophiquement.
Immersion fermée. les schémas affines étaient définis au moyen d'uned'une algèbre de présentation finie $R :=$
$k[t_1, \cdots, t_{\mathfrak{n}}]/(f_1, \cdots, f_r)$ ce qui permettait de voir Spec(R) l'intérieur de $\mathfrak{A}^($Ôn

$= \mathfrak{Speck}[t_1, \cdots, t_\mathfrak{n}]$ que l'on doit pouvoir voir comme un fermé. Supposons que λ : S$\rightarrow$ S/I est la surjection d'une k-algèbre S sur son quotient par un idéal I alors le λ^* Spec (S/I) $\rightarrow$ Spec (S) qui s'en déduit est un monomorphisme, autrement dit il y a au plus un morphisme S$\rightarrow$A possible qui définisse un S/I$\rightarrow$A donné. C'est le modèle que D M donne comme modèle de la notion d'immersion fermée. Un fermé d'un schéma affine Spec(S) est défini par un idéal (et correspond intuitivement à l'ensemble des points où toutes les fonctions de cet idéal s'annulent simultanément).

L'exemple le plus simple d'immersion fermée est l'inclusion de $\{*\}$ =Spec (k) comme l'origine $\{t = 0\}$ dans $\mathbb{A}$ = Spec(k[t]) définie par l'idéal (t). $\mathbb{A}^1$ est le foncteur qui à toute algèbre A associe l'ensemble A lui-même. Il s'agit ici du sous-foncteur qui choisit le singleton $\{0\}$ dans n'importe quel A

Je donne la définition de DM.
Soit Ω le foncteur qui à une k-algèbre A associe l'ensemble de ses idéaux (et à un morphisme ϕ : A$\rightarrow$B associe l'application envoyant un idéal de A sur l'idéal engendré par son image dans B. Soient 0 et 1 les sous-foncteurs de Ω qui choisissent l'idéal nul et l'idéal unité respectivement, c'est- -dire 0 : Spec(k) $\rightarrow \Omega$ envoie (pour toute k-algèbre A) l'unique élément du singleton Spec(k)sur l'idéal nul de A et 1 : Spec(k) $\rightarrow \Omega$ l'envoie sur l'idéal A tout entier.

On dit qu'un morphisme de foncteur $Y \rightarrow X$ est une immersion fermée (resp. ouverte) est une immersion fermée (resp. ouverte) lorsqu'il s'obtient comme pullback du morphisme 0 (resp. 1) par un certain morphisme $X \rightarrow \Omega$.

On peut définir ensuite la localisation, puis la faisceautisation et parvenir à la définition complète d'un schéma telle que donnée au début de cet exposé.
On définit une immersion ouverte où l'idéal I est engendré par un seul élément f.
Si R est k-algèbre et f$\in$ R on désigne (on appelle localisation de R en inversant f) le quotient R[z]/(z. f-1) de l'anneau R[z] des polynômes en une indéterminée z sur R par son idéal engendré par zf-1 (z est un inverse e f). On note g/f^{i} l'image de z^{i}dans ce quotient (tous les éléments de R[1/f] sont de cette forme

Le morphisme R[1/f] $\rightarrow$A vers une k-algèbre quelconque s'identifient naturellement aux morphismes ϕ : R$\rightarrow$A tels queϕ(f) soit inversible. Et Spec(R[1/f]$\rightarrow$Spec(R) est une immersion ouverte (associée à l'déal principal engendré par f) On dit que Spec ([1/f])$\mathfrak{estl'ouvertprincipaldfiniparf.C'estl'ouvert}\{$ f$\neq$ 0$\}$ de Spec(R). D(f) complémentaire du fermé $\{\mathfrak{f}=0\}$ et donc Zariski.

Un schéma sur K est un foncteur covariant des k-algèbres vers les ensembles , X tel que
ce foncteur est un faisceau pour la topologie de Zariski
il existe une famille d'mmersions ouvertes $U_\alpha \rightarrow X$ telles que
1- chaque U_α soit un schéma affine ($U_\alpha = \mathrm{Spec}(R_\alpha)$)
2- pour toute k-algèbre A, tout élément $x \in X(A)$ appartient localement à l'un des $U_{\alpha'}$ au sens où il existe $f_1, \cdots, \mathfrak{f}_r$ engendrant l'idéal unite tel que l'image de x dans chaque $X(A[[1/f_i])$ soit dans l'image d'un $U_\alpha(A[1/f_i])$. Les U_α recouvrent X.